

Αποδείξεις

4/3/19.

(i) Έστω $\sigma \in \mathbb{R}$ και εφόσον f, g είναι κατω ημι συνεχείς τα σύνορα

$K_f(\sigma) := \{x \in A : f(x) > \sigma\}$ και $K_g(\sigma) := \{x \in A : g(x) > \sigma\}$
είναι ανοικτά του A . Ομως,

$$K_{f \wedge g}(\sigma) = \{x \in A : \min\{f(x), g(x)\} > \sigma\} = \{x \in A : f(x) > \sigma\} \cap \{x \in A : g(x) > \sigma\} \\ = K_f(\sigma) \cap K_g(\sigma)$$

Οποότε $K_{f \wedge g}(\sigma)$ είναι ανοικτό του A ως ενοποιημένο άνω άνω των A . Εφόσον ισχύει $\forall \sigma \in \mathbb{R}, f \wedge g$ κατω ημι συνεχής

(ii) $x \in K_{f \vee g}(\sigma) \Rightarrow x \in \{x \in A : \max\{f(x), g(x)\} > \sigma\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \max\{f(x), g(x)\} > \sigma \Rightarrow f(x) > \sigma, g(x) > \sigma \Rightarrow x \in K_f(\sigma) \text{ ή } x \in K_g(\sigma)$$

$$\Rightarrow x \in K_f(\sigma) \cup K_g(\sigma) \text{ άρα } K_{f \vee g}(\sigma) \subseteq K_f(\sigma) \cup K_g(\sigma) \text{ Ομοίως } \\ \text{από } K_f(\sigma) \cup K_g(\sigma) \subseteq K_{f \vee g}(\sigma)$$

$K_{f \vee g}(\sigma) = K_f(\sigma) \cup K_g(\sigma)$ οπότε ανοικτό του A ως ένωση ανοικτών ου $f \vee g$ είναι ημι συνεχής

(iii)

$$\begin{aligned} \text{Έστω } x \in K_{f+g}(\sigma) &\Leftrightarrow (f+g)(x) > \sigma \Leftrightarrow f(x) + g(x) > \sigma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) > \sigma - g(x) \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : f(x) > r > \sigma - g(x) \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x \in K_f(r) \\ &\text{και } x \in K_g(\sigma - r) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} K_f(r) \cap K_g(\sigma - r) \end{aligned}$$

το $K_f(r)$ ανοικτό διότι f κάτω ημισυνεχής και $K_g(\sigma - r)$ ανοικτό διότι g κάτω ημισυνεχής.

$K_f(\sigma) \cap K_g(\sigma - r)$ ανοικτό υποσ. του A (ως τομή 2 ανοικτών).
και $K_{f+g}(\sigma)$ ανοικτό ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών.

(iv)

$$x \in K_{af}(\sigma) \Leftrightarrow af(x) > \sigma \Leftrightarrow f(x) > \frac{\sigma}{a} \Leftrightarrow x \in K_f\left(\frac{\sigma}{a}\right) \text{ άρα}$$

$K_{af}(\sigma) = K_f\left(\frac{\sigma}{a}\right) \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}$ και εφόσον $K_f\left(\frac{\sigma}{a}\right)$ ανοικτό του A
άρα $K_{af}(\sigma)$ είναι ανοικτό του A .

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έαν X, Y τοπ. χώροι και $f: X \rightarrow Y$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(i) Η f είναι συνεχής στο X

(ii) Το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό του X , για κάθε V ανοικτό του Y

ΑΣΚΗΣΗ

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κάτω ημισυνεχής και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και να οριστεί η $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν η $f \circ g$ είναι κάτω ημ.

Απόδειξη

Έστω $V_\sigma = (\sigma, +\infty)$ ανοικτό του $\mathbb{R}$. Τότε εφόσον η f είναι κάτω ημ. τότε

$V_\sigma = f^{-1}(V_\sigma)$ είναι ανοικτό του $\mathbb{R}$. Όπως εφόσον $f^{-1}(V_\sigma)$ αρ. του $\mathbb{R}$ και g συνεχής: $g^{-1}(f^{-1}(V_\sigma))$ ανοικτό του $\mathbb{R}$ δηλ. $(f \circ g)^{-1}(V_\sigma)$ ανοικτό του $\mathbb{R}$ οπότε $f \circ g$ είναι κάτω ημισυνεχής. (13)

ΠΡΟΤΑΣΗ

(i) Έστω (f_n) είναι μια άνω φραγμένη ακολουθία κάτω ημι συνεχών συναρτήσεων του $F(A, \mathbb{R})$ τότε

$\bigvee f_n(x) = \sup \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \}$ είναι κάτω ημι συνεχής

(ii) Έστω (f_n) είναι μια κάτω φραγμένη ακολουθία άνω ημι συνεχών συναρτήσεων του $F(A, \mathbb{R})$ τότε η $\bigwedge f_n \in$

$\bigwedge f_n(x) = \inf \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \}$ είναι άνω ημι συνεχής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Εφόσον (f_n) άνω φραγ. ακολουθία : $\sup \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \}$ έχει νόημα

Έστω $x \in K_{\bigvee f_n}(\sigma) \Rightarrow x \in \{ x \in A : \sup \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \} > \sigma \}$

αλλά $\sup \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \} > \sigma \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : f_{n_0}(x) > \sigma$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : x \in K_{f_{n_0}}(\sigma) \Rightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{f_n}(\sigma)$ Άρα $K_{\bigvee f_n}(\sigma) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{f_n}(\sigma)$

Όμοια αποδ. : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{f_n}(\sigma) \subseteq K_{\bigvee f_n}(\sigma)$ Άρα

$K_{\bigvee f_n}(\sigma) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_{f_n}(\sigma)$. Άρα $K_{\bigvee f_n}(\sigma)$ ανοικτό του A ως αλγεβρική ένωση των ανοικτών $K_{f_n}(\sigma)$

(ii) Εφόσον (f_n) κάτω φραγμένη έχει νόημα το $\inf \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \}$

$A_{\bigwedge f_n}(\sigma) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{f_n}(\sigma)$. ανοικτό ως ένωση αριθμ. ανοικτών.

ΠΡΟΤΑΣΗ

- (i) Εάν (f_n) αύξουσα και φραγμένη ακολουθία ^{κάτω} ημισυνεχών συναρτήσεων στο $F(A, \mathbb{R})$ τότε το κατά σημείο όριο της (f_n) είναι κάτω ημισυνεχής συνάρτηση.
- (ii) Εάν (f_n) είναι φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία άνω ημισυνεχών συναρτήσεων τότε το κατά σημείο όριο είναι άνω ημισυνεχής συνάρτηση.

$$\left[\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{ε.σ.}} f \text{ στο } A \quad (\forall x \in A) (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x)) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \\ f_n \xrightarrow{\text{φ.σ.}} f \text{ στο } A \quad (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A \end{array} \right]$$

Απόδειξη

- (i) Έστω (f_n) αύξουσα και φραγμένη και $\forall n, f_n$ κάτω ημισυνεχής.
Για κάθε $x \in A$: $\sup \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \}$ είναι πραγματικός αριθμός.
Επίσης εφόσον (f_n) αύξουσα ακολουθία $\forall x \in A$

$\lim_n f_n(x) = \sup \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \}$ (δίνει αν $\sup \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \} = l$
τότε $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(x) : f_{k_0}(x) > l - \varepsilon$ αλλά (f_n) αύξουσα
οπότε $\forall n > k_0 : l \geq f_n(x) > f_{k_0}(x) > l - \varepsilon$ άρα $l - \varepsilon < f_n(x) \leq l < l + \varepsilon$
 $\forall n > k_0$ άρα $|f_n(x) - l| < \varepsilon \quad \forall n > k_0$ δηλ. $\lim f_n(x) = l = \sup \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \}$
Άρα $\forall x \in A$ ορί f είναι η οριακή συνάρτηση :

$f(x) = \lim_n f_n(x) = \sup \{ f_n(x) : x \in A \} = \vee f_n(x)$ και $\forall f_n$ είναι κάτω ημι-
συνεχής εφόσον κάθε f_n κάτω ημισυνεχής

- (ii) Εφόσον (f_n) φθίνουσα και φραγμένη και $\forall n, f_n$ ~~κάτω~~ ^{άνω} ημισυνεχής
 $\lim f_n(x) = f(x), f(x) = \lim f_n(x) = \inf \{ f_n(x) : n \in \mathbb{N} \} = \wedge f_n(x)$
και εφόσον $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n είναι άνω ημισυνεχής και $\wedge f_n$
είναι άνω ημισυνεχής.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Εστω (f_n) φραγμένη και μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε το καθε σημείο ορίου της (f_n) :

- (i) είναι κάτω ημισυνεχής αν η (f_n) είναι αύξουσα
- (ii) είναι άνω ημισυνεχής αν η (f_n) είναι φθίνουσα

Απόδειξη

Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα σημείο $x \in A$ είναι άνω και κάτω ημισυνεχής στο x .

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω (f_n) μια ακολουθία κάτω (άνω) ημισυνεχών συναρτήσεων στο $F(A, \mathbb{R})$ που συγκλίνει ομοιομορφα προς κάποια $f \in F(A, \mathbb{R})$ τότε η f είναι κάτω ημισυνεχής

Απόδειξη

Εστω $\{f_n\}$ ακολουθία κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων και εστω $f_n \xrightarrow{\text{ομ/φρ}} f$ στο A . Εστω $\sigma \in \mathbb{R}$ θ.δ.ο $K_f(\sigma)$ ανοικτό σε A .

Εστω $y \in K_f(\sigma) \Rightarrow f(y) > \sigma$. Οποτε για ετο (μικρό) :

$$f(y) > \sigma + \varepsilon > \sigma + \varepsilon \quad (\text{διοτι εαν } \varepsilon_1 = f(y) - \sigma \text{ τότε για } \varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2} \text{ έχουμε το } f(y) - \varepsilon > \sigma + \varepsilon)$$

(*)

Επίσης εφόσον $\lim_n f_n(y) = f(y)$ αρα για $\varepsilon > 0$ (μικρό)

έχουμε $\exists n_1 \in \mathbb{N} : |f_{n_1}(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$ αρα $-\varepsilon < f_{n_1}(y) - f(y) < \varepsilon$

$$\forall n \geq n_1 : -\varepsilon + f(y) < f_n(y) < \varepsilon + f(y) \quad \forall n \geq n_1 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} -\varepsilon + \sigma + 2\varepsilon < f_n(y)$$

οποτε $\sigma + \varepsilon < f_n(y) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \forall n \geq n_1$ Επίσης εφόσον $f_n \xrightarrow{\text{ομ/φρ}} f$ στο A έπεται

α για ετο μικρό $\exists m_2 \in \mathbb{N} : |f_{m_2}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq m_2 \quad \forall x \in A$ θεωρούμε

$n_0 = \max\{n_1, m_2\}$ οποτε απο την (i) έχουμε $f_{n_0}(y) > \sigma + \varepsilon \Rightarrow y \in K_{f_{n_0}}(\sigma + \varepsilon)$

και εφόσον f_{n_0} είναι κάτω ημ. το $K_{f_{n_0}}(\sigma + \varepsilon)$ είναι ανοικτό

οπότε $(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x - y| < \delta \Rightarrow x \in K_{f_{u_0}}(\sigma + \varepsilon))$

δηλ. $(\forall x \in A) : |x - y| < \delta \Rightarrow f_{u_0}(x) > \sigma + \varepsilon$ (3)

Από την (2) : $|f_{u_0}(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f_{u_0}(x) - f(x) < \varepsilon$

αρα $f_{u_0} - \varepsilon < f(x) \forall x \in A$ (4) αρα από τις (3) και (4)

$(\forall x \in A) : |x - y| < \delta$

$\sigma + \varepsilon - \varepsilon < f(x) \Rightarrow x \in K_f(\sigma)$ αρα $(\forall x \in A) : |x - y| < \delta \Rightarrow x \in K_f(\sigma)$

αρα $K_f(\sigma)$ ανοιχτό $\forall \sigma \in \mathbb{R}$ αρα f κάω ημι συνεχής

Εάν (f_n) ακολουθία άνω ημι συνεχών συναρτησεων $f_n \xrightarrow{\text{ptwise}} f$

τότε $-f_n \xrightarrow{\text{ptwise}} -f$ και $(-f_n)$ ακολουθία κάτω ημι συνεχών συναρτησεων

(όπως συμπεραίνει με τα προηγ.) $-f$ κάω ημι συνεχής $\Rightarrow$ f άνω ημι συνεχής.

Άσκηση

Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ π.ω

στο $x = -1$ f άνω ημι συνεχής, αλλά όχι κάω ημι συνεχής

στο $x = 1$: f κάω ημι. αλλά όχι άνω ημι. Στο $x = 0$

να μην είναι ούτε άνω ούτε κάω ημι συνεχής και να μην

αλλά να είναι συνεχής.

Άσκηση

Έστω $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 2, & x = 1 \\ 3, & x \in (1, 2] \end{cases}$

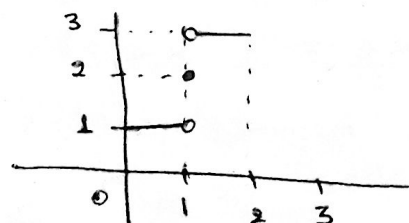
Να εξετάσετε την f ως προς την ημισ.

(άνω και κάτω) στο πεδίο ορισμού της

Απάντηση

Στα διασ. $[0, 1)$ και $(1, 2]$ f (ως σταθνή)

σε κάθε σημείο τους.



$$\liminf_{x \rightarrow 1} f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf \{ f(x) : x \in B_\delta(1) \} \quad \liminf_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$\limsup_{x \rightarrow 1} f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup \{ f(x) : x \in B_\delta(1) \} = 3.$$

Για να είναι a f άνω ημισυνεχής στο y Ⓟ

$\limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq f(y)$ ενώ f κάτω ημ. αν $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \geq f(y)$

$f(1)=2$ Άρα στο $x_0=1$ η f δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω ημισυνεχής

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν A συμπαγές και (f_n) ακολουθία μονότονη (αύξ. ή φθίν.) στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $C(A, \mathbb{R})$ π.ω $f_n \xrightarrow{εσ} f$ στο A όπου $f \in C(A, \mathbb{R})$. Τότε $f_n \rightarrow f$ ομ./γα σύνολο A .

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω $A \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές και (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο $F(A, \mathbb{R})$ η οποία συχλίνει κατά σημείο προς μια συνεχή συνάρτηση $f \in C(A, \mathbb{R})$ τότε η σύχλιση θα είναι ομοιόμορφη εαν ισχύει μια από τις συνθήκες

- (i) (f_n) αύξουσα και κάθε μια από τις f_n : κ.ημ.
- (ii) (f_n) φθίνουσα ακα. και κάθε μια από τις f_n : άνω ημ.

Απόδειξη

(i) Εστω (f_n) αύξουσα ακολουθία κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων $f_n = f - f_n$ (*), $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον (f_n) αύξουσα η $(-f_n)$ θα είναι φθίνουσα ακα. (f_n) φθίνουσα. Επίσης εφόσον (f_n) ακολουθία κάτω ημισ. συν. $(-f_n)$ θα είναι ακα. άνω ημισυν. συνεπ. οπότε $\forall n$ f_n άνω ημισυνεχής (ως άθροισμα άνω ημισυνεχών) οπότε $(\forall \epsilon > 0)$ ορίζουμε $A_n = \{x \in A : f_n(x) < \epsilon\} = f_n^{-1}(-\infty, \epsilon)$ (διότι f_n άνω ημισ.) . Εφόσον $f_n \xrightarrow{εσ} f$ στο A $(\forall x \in A)(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\epsilon, x)) : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ ~~φραζομαι~~ οπότε λόγω (*) $(\forall x \in A)(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : |f_n(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$ (**)

Αλλά (f_n) αύξουσα ακολουθία : $f(x) = \lim_n f_n(x) = \sup \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$

Άρα $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x) > 0$ οποτε από $(**)$

$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \varphi_n(x) < \varepsilon : \forall n \geq n_0$

Άρα εάν $x \in A \Rightarrow x \in \varphi_n^{-1}(-\infty, \varepsilon) = A_n$

οποτε $x \in A$ τότε x ανήκει τουλάχιστον σε ένα από

τα A_n άρα $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και A_n ανοικτό $\forall n$ (δίοα φ_n ανω ημω.) λόγω του ότι λ συμπαγές υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ π.ω $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_{\lambda_i}$ και εστω $\Lambda = \max \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$. λόγω

οτι η (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων (δίοα

εάν $n_1 < n_2$ τότε $x \in A_{n_1} \Rightarrow \varphi_{n_1}(x) < \varepsilon \Rightarrow \varphi_{n_2}(x) < \varphi_{n_1}(x) < \varepsilon$
(αφ' ου φ θιν.)

$\Rightarrow x \in A_{n_2}$) Έπειτα $A_{\lambda_i} \subseteq A_{\Lambda}$

άρα $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_{\lambda_i} \subseteq A_{\Lambda}$ άρα εάν $x \in A$ τότε $x \in A_{\Lambda} \Rightarrow \varphi_{\Lambda}(x) < \varepsilon$

Εφόσον αυτή ισχύει $\forall x \in A$ $\varphi_{\Lambda}(x) < \varepsilon$, $\forall x \in A$,

Επίσης εάν $n \geq 1$ τότε αν $x \in A$ $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_1(x) < \varepsilon$

Άρα $\forall n \geq 1$ $\varphi_n(x) < \varepsilon$ $\forall x \in A$ οποτε $0 < f(x) - f_n(x) < \varepsilon$

$\forall x \in A$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq 1, \forall x \in A$.